MAI 2 Příklady na cvičení 15.4.2014 - a

1. Rozhodněte, zda následující funkce jsou spojité v R^2:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

c) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

2. Lze následující funkce spojitě rozšířit na R^2?

a) $f(x,y)=(x+y)^2.\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; b) $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; c) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2x}$;

d) $f(x,y)=\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}$.

3. „Mechanické“ derivování:
Vypočítejte parciální derivace 1. a 2.řádu všude, kde existují, funkcí:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; b) $f(x,y)=\log(x+\sqrt{x^2+y^2})$; c) $f(x,y,z)=e^{xyz}$ d) $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$;

e) $f(x,y,z)=\arcsin\left(\dfrac{z^2}{x^2+y^2}\right)$.

f) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ je v $R^2-\{(0,0)\}$ řešením rovnice $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

(Laplaceova rovnice).

4. Diferenciál a jeho užití:
a) Určete, kde následující funkce mají první i druhý diferenciál a tyto diferenciály napište:
i) $f(x,y)=\exp(x^2-y)$ (a spočítejte přibližně pomocí Taylorova polynomu 2.stupně $f(1{,}02;0{,}97)$);
ii) $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$.

b) Ukažte, že pro malá x,y platí $arctg\dfrac{x+y}{1+xy}\cong x+y$.

c) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$.

5. Je dána funkce $f(x,y)=4\sqrt{1-\dfrac{y}{x+1}}$.

a) Najděte definiční obor D funkce f a nakreslete jej.
b) Vypočítejte $\nabla f(0,-3)$;
c) Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě $(0,-3)$ a určete v tomto bodě diferenciál funkce f.
d) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(0,-3,8)$.
e) Nabývá funkce f globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř ?